LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS. LMD DARBAI
51 tomas, 2010, 80–84

ISSN 0132-2818
www.mii.lt/LMR/

mokykloje klausimu

Antanas Apynis

Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas
Naugarduko 24, LT-03225 Vilnius

E. paštas: antanas.apynis@mif.vu.lt

Santrauka. Straipsnyje nagrinėjami matematinės analizės pradmenų dėstymo vidurinėje mokykloje didaktiniai aspektai.

Raktiniai žodžiai: daugianaris, funkcija, išvestinė, matematinė analizė, riba.

1 Problemos aktualumas

Visuotinai pripažįstama, kad spręsti funkcijos monotoniškumo tyrimo ar jos ekstremumo taškų paieškos uždavinius netaikant išvestinės funkcijos savybių būtų labai nešiuolaikiška. Taigi išvestinės funkcijos (išvestinės) vieta mokyklinėje matematikoje yra gana aiški (tiek bendrojoje, tiek išplėstinio kurso programoje). Tačiau funkcijos ribos sąvokos, kuria remiantis apibrėžiama tolydžiojo argumento funkcijos išvestinė, vis dar gana atkakliai vengiama. Integralai (ir apibrežtinis, ir neapibrežtinis) aiškinami išsiverčiant be diferencialo sąvokos, o pažinties su diferencialine lygtimi visai atsisakoma. Teisinamasi, žinoma, iš pirmo žvilgsnio svariomis priežastimis.

Šiame straipsnyje matematinės analizės pradmenų dėstymo problemą pagvildensime pirmiausia didaktiniu požiūriu. Autoriaus nuomone, būtent didaktinio pobūdžio priežastys yra svarbiausia kliūtis, trukdanti mokyklinės matematikos programų sudarytojams ir vadovėlių autoriams deramu lygiu įteisinti matematinės analizės pradmenis vidurinėje mokykloje.

2 Funkcijos ribos aiškinimo didaktiniai aspektai

Matematiškai griežtas funkcijos ribos apibrėžimas nėra per sunkus tik patiems gabiausiems gimnazijų mokiniams. Tačiau tai neturėtų būti rimta priežastimi šią temą išbraukti iš mokyklinės matematikos programos. Ilgametė patirtis patvirtina mintį, kad laipsniškai aiškinant šią sąvoką (nuo intuityvios sampratos iki matematiškai korektiško apibrėžimo) galima pasiekti visiškai priimtinų rezultatų.

Skaičiavimą grindžiant intuityvia tolydžiojo argumento funkcijos ribos samprata nesunku paaiškinti kiekvienam gimnazijos mokiniui (net ir tam, kuris mokosi pagal bendrojo kurso programą), kad, pavyzdžiui,

$$\lim_{x\to 2}\bigl(5x^2-7x+3\bigr)=5\cdot 2^2-7\cdot 2+3=9,$$
$$\lim_{x\to 1}\frac{8x^4+7x^3+1}{7x^3-2x^2-1}=\frac{8\cdot 1+7\cdot 1+1}{7\cdot 1-2\cdot 1-1}=\frac{16}{4}=4.$$

Kas kita būtų gautus rezultatus pagrįsti remiantis matematiškai tiksliu funkcijos ribos apibrėžimu. Tai gana sunku ir universiteto pirmakursiui.

Gana paprasta suformuoti ir tolydumo korektišką sampratą, aiškinimą grindžiant pavyzdžiais, konkrečių funkcijų grafikais ir pan. Per ankstyvas formalus tolydumo apibrėžimas sąlyga

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

gali ir nepasiteisinti.

Apibūdinant ribą $\lim_{x\to a} f(x)=A$, kai funkcija f yra apibrėžta kurioje nors taško a aplinkoje $U_\delta(a)=(a-\delta;a)\cup(a;a+\delta)$, $\delta>0$, sąlygą $0<|x-a|<\delta$ tikslinga pakeisti sąlyga $x\approx a(x\neq a)$, o nelygybę $|f(x)-A|<\varepsilon$, $\varepsilon>0$, apytiksle lygybe $f(x)\approx A$. Tada būtų galima aiškinti, kad skaičius A vadinamas funkcijos riba taške a, jei galioja tokia sąlyga:

$$x\approx a(x\neq a)\quad\Rightarrow\quad f(x)\approx A.$$

Žinoma, matematinis tikslumas čia prarandamas; užtat labiau išryškėja pačios sąvokos esmė. Be to, toks funkcijos ribos apibūdinimas neuždaro mąstymo erdvės, neatima galimybės tikslinti apibrėžimą iki matematiškai tikslaus. Taip pat aišku, kad tokio ribos apibrėžimo visiškai pakanka racionaliųjų funkcijų riboms skaičiuoti ir kitiems uždaviniams spręsti.

3 Liopitalio taisyklės taikymas trupmeninės racionaliosios funkcijos ribai skaičiuoti nevartojant išvestinės sąvokos

Tarkime, kad racionalioji funkcija $f(x)$ yra daugianarių $P(x)$ ir $Q(x)$, tenkinančių sąlygą $P(a)=Q(a)=0$, santykis. Aišku, kad kurioje nors aplikoje $(a-\delta;a)\cup(a;a+\delta)$, $\delta>0$, daugianaris $Q(x)$ neturi šaknų. Vadinasi, yra tokia taško a aplinka, kurioje funkcija

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

yra apibrėžta. Tačiau (dėl $P(x)$ ir $Q(x)$ tolydumo) $P(x)\approx 0$ ir $Q(x)\approx 0$, kai $x\approx 0$ $(x\neq a)$. Todėl neįmanoma (dėl skaičių $P(x)$ ir $Q(x)$ artumo nuliui) iš karto įžvelgti, koks turėtų būti ribos $\lim_{x\to a} f(x)$ nagrinėjimo rezultatas (riba gali net neegzistuoti). Šiuo atveju daugianarius $P(x)$ ir $Q(x)$ tikslinga pakeisti žemesnio laipsnio daugianariais

$$P_1(x)=\frac{P(x)}{x-a}\quad\text{ir}\quad Q_1(x)=\frac{Q(x)}{x-a},\quad x\neq a.$$

Jeigu tik $Q_1(a)\neq 0$, tai gaunamas toks rezultatas:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to a}\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}=\frac{P_1(a)}{Q_1(a)}.$$

Daugianarių $P(x)$ ir $Q(x)$ dalybos iš dvinario $x-a$ liekanos (pagal Bezu teoremą) lygios nuliui; taigi padalyti įmanoma. O dalmenis $P_1(x)$ ir $Q_1(x)$ rasti visai nesunku, pavyzdžiui, dalijant kampu.

Antra vertus, daugianarių $P(x)$ ir $Q(x)$ dalybą iš $x-a$ (tikslingumo požiūriu) galima aiškinti kaip savotišką matematinio mikroskopo taikymą dydžių $P(x)$ ir $Q(x)$ reikšmėms palyginti, nes $|P_1(x)| > |P(x)|$ ir $|Q_1(x)| > |Q(x)|$, kai $|x-a|$ yra artimas nuliui skaičius ($x \neq a$).

Žvelgiant matematiko akimis aišku, kad

$$\lim_{x\to a} P_1(x) = \lim_{x\to a} \frac{P(x)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{P(x)-P(a)}{x-a} = P'(a)$$

ir $\lim_{x\to a} Q_1(x) = Q'(a)$.

Taigi pateiktasis trupmeninės racionaliosios funkcijos ribos skaičiavimo neapibrėžtumo taške būdas iš tiesų yra Liopitalio taisyklės taikymas.

Apibendrinant galima padaryti išvadą, kad racionaliųjų funkcijų (tiek sveikųjų, tiek trupmeninių) ribų skaičiavimą galima įtraukti net į bendrojo kurso mokyklinės matematikos programą. Išplėstinio kurso programoje turėtų būti ir sunkesnių uždavinių. Be to, išplėstinio kurso programoje (galbūt) galėtų atsirasti vietos ir funkcijos ribos (matematiškai) tikslesniam apibrėžimui.

4 Bezu teoremos taikymas skaičiuojant racionaliosios funkcijos išvestinę

Tarkime, kad $P(x)$ yra bet kurio laipsnio daugianaris, o a – bet kuris realusis skaičius. Dalydami $P(x)$ iš $x-a$, gauname tam tikrą žemesnio laipsnio daugianarį, sakykime, $P_1(x)$ ir liekaną $P(a)$ (pagal Bezu teoremą). Tada

$$P(x) = P_1(x)(x-a) + P(a).$$

Vadinasi,

$$P'(a) = \lim_{x\to a} \frac{P(x)-P(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{P_1(x)(x-a)}{x-a} = \lim_{x\to a} P_1(x) = P_1(a).$$

Matome, kad skaičiuojant daugianario išvestinę pakanka gebėjimo daugianarį $P(x)$ dalyti iš dvinario $x-a$ (pavyzdžiui, atliekant šį veiksmą kampu) ir neformalaus supratimo apie funkcijos ribą.

Nesunku Bezu teormą „įkinkyti“ ir skaičiuojant trupmeninės racionaliosios funkcijos $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ išvestinę bet kuriame jos apibrėžimo taške a. Pagal šią teoremą daugianarius $P(x)$ ir $Q(x)$ galima užrašyti taip:

$$P(x) = P_1(x))x-a) + P(a) \quad \text{ir} \quad Q(x) = Q_1(x)(x-a) + Q(a).$$

Todėl

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= \frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{P(a)}{Q(a)} = \frac{P_1(x)(x-a)+P(a)}{Q_1(x)(x-a)+Q(a)} - \frac{P(a)}{Q(a)} \\ &= \frac{(P_1(x)Q(a) - P(a)Q_1(x))(x-a)}{(Q_1(x)(x-a)+Q(a))Q(a)} \\ &= \frac{(P_1(x)Q(a) - P(a)Q_1(x))(x-a)}{Q(x)Q(a)}. \end{aligned}$$

Vadinasi,

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{P_1(x)Q(a)-P(a)Q_1(x)}{Q(x)Q(a)} = \frac{P_1(a)Q(a)-P(a)Q_1(a)}{Q^2(a)}.$$

Visi skaičiavimai yra matematiškai korektiški, nes $Q(a) \neq 0$ ir egzistuoja taško a aplinka $U_\delta(a) = (a-\delta; a) \cup (a; a+\delta)$, $\delta > 0$, kurioje daugianaris $Q(x)$ neturi šaknų.

Kadangi $P_1(a) = P'(a)$ ir $Q_1(a) = Q'(a)$, tai galima užrašyti ir bendresnę formulę:

$$\left(\frac{P}{Q}\right)'(a) = \frac{P'(a)Q(a)-P(a)Q'(a)}{Q^2(a)}.$$

5 Baigiamosios pastabos

Pirmiausia norėtume atkreipti dėmesį į tai, kad skaičiuojant daugianarių $P(x)$ ir $Q(x)$ santykio ribą taške a, kai $P(a) = Q(a) = 0$, taip pat galima remtis Bezu teorema. Šiuo atveju gautume, kad $P(x) = P_1(x)(x-a)$ ir $Q(x) = Q_1(x)(x-a)$; todėl

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to a}\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}.$$

Akivaizdu, kad tuo nesibaigia Bezu teoremos taikymo mokyklinėje matematikoje galimybės. Daugianarį $P(x)$ užrašius formule

$$P(x) = P_1(x)(x-a) + P(a),$$

bei žinant, kad $P_1(a) = P'(a)$ ir $P_1(a) = \lim_{x\to a} P_1(x)$, galima nagrinėti daugianario $P(x)$ aproksimavimo tiesine funkcija $P_1(a)(x-a) + P(a)$, arba $P'(a)(x-a) + P(a)$, problemą, nes

$$P(x) \approx P_1(a)(x-a) + P(a) = P'(a)(x-a) + P(a).$$

Antra vertus, lygtis $y = P'(a)(x-a) + P(a)$ yra funkcijos $y = P(x)$ grafiko liestinės, einančios per jo tašką $(a; P(a))$, lygtis.

Literatūra

[1] A. Apynis, E. Stankus. *Matematikos pagrindai.* TEV, Vilnius, 2009.

[2] A. Apynis, J. Šinkūnas. Ar aukštosios matematikos pradmenys reikalingi lietuvos gimnazijoje? *Liet. matem. rink.*, **47**(spec. nr.):217–219, Vilnius, 2007.

[3] *Matematika* 12, I dalis, išplėstinis kursas. TEV, Vilnius, 2003.

[4] *Matematika*, išplėtinis kursas, vadovėlis XI klasei, antroji knyga. Šviesa, Kaunas, 2004.

SUMMARY

On teaching fundamentals of calculus at secondary school

A. Apynis

The article, from different didactical aspects, analysis the problem of teaching fundamentals of calculus at secondary school. Continuity and limit of a function are suggested to be explained on the base of an informal concept and examples of these notions. An explanation of this kind is completely sufficient in solving problems of calculation of limits and derivatives of rational functions as well as other problems.

Keywords: calculus, function, limit, derivative, polynomial.